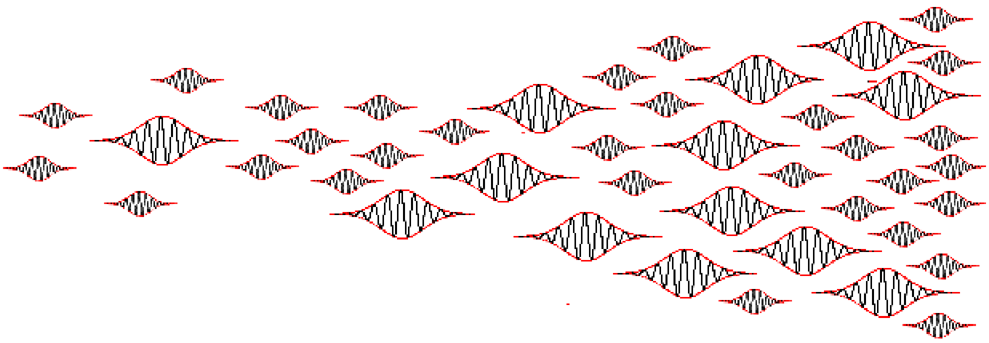
Stefano Petrarca

Matematica per la Musica e il Suono



Aracne Editrice s.r.l. - Roma

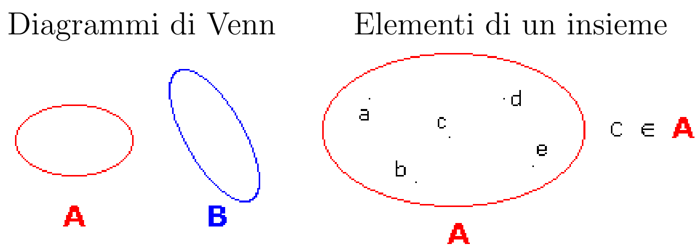
Capitolo 1

Insiemistica e Logica

L'Insiemistica è un'area molto teorica e astratta della Matematica e tratta di concetti primitivi e fondanti per la maggior parte delle branche della Matematica stessa; essa fornisce un linguaggio comune alle varie teorie matematiche e concetti di base da cui far partire le catene deduttive che costituiscono i teoremi di cui si compone. La teoria degli insiemi, in campo musicale, è stata evocata sorprendentemente nella *pitch-class set analysis* sviluppata originariamente da Allen Forte negli Stati Uniti nei primi anni '70 ed esposta nel libro *The Structure of Atonal Music*; la parola inglese *set* usata in contesto matematico si traduce proprio con insieme. Questa teoria analitica è stata sviluppata per poter disporre di un metodo per analizzare i lavori atonali non dodecafonici dei compositori della prima metà del Novecento e fa uso (in maniera un po' ingenua, forse) del concetto matematico di insieme. Gli elementi di questi insiemi, le classi di altezze, costituiscono il fondamento per un metodo di ricerca delle connessioni profonde tra i materiali sonori esposti nei brani atonali. In realtà la *pitch-class set analysis* è un miscuglio di tecniche matematiche che va oltre la semplice applicazione della teoria degli insiemi ma coinvolge le teorie combinatorie, le successioni, i vettori, le matrici, etc. Dopo le definizioni teoriche, che certo risulteranno molto astratte, saranno descritti con maggior dettaglio alcuni aspetti di questo metodo analitico in modo da avere un riscontro pratico dei concetti appresi.

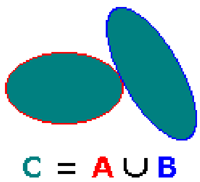
1.1 Insiemi e numeri

1.1.1 Insiemi

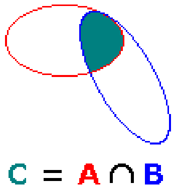


A e **B** sono **insiemi**, cioè aggregati primitivi di oggetti di qualsiasi natura. Il simbolo $\in$ sta per **appartiene a** ...: nella figura, infatti, **c** è un elemento di **A**. I *diagrammi di Venn*, che sono molto usati in questo ambito, sono composti da ellissi (che rappresentano gli insiemi) di varie forme, misure e colori combinate fra loro in modo da evidenziare graficamente proprietà e relazioni tra insiemi. Quando si vogliono evidenziare singoli elementi di un insieme si inseriscono, anche disordinatamente, all'interno della relativa ellisse dei punti contrassegnati da un simbolo. È possibile combinare tra loro più insiemi tramite alcune operazioni di base.

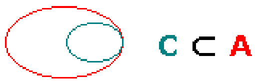
1.1.2 Operazioni fra insiemi



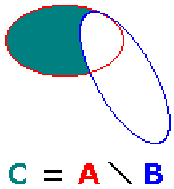
Unione



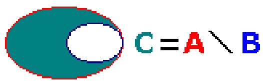
Intersezione



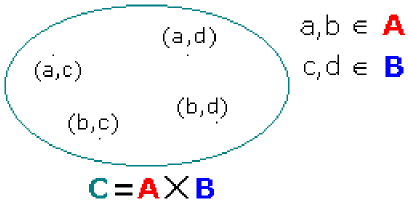
Inclusione



Complemento (es. 1)



Complemento (es. 2)

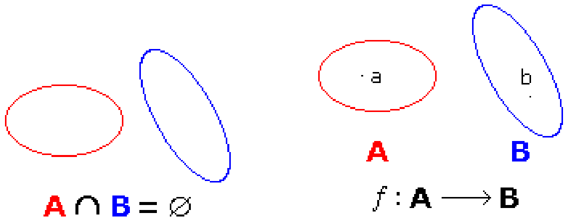


Prodotto cartesiano

Nei diagrammi di Venn soprastanti sono mostrate le operazioni fondamentali che si possono effettuare fra insiemi; sotto ogni grafico viene mostrato il simbolo corrispondente all'operazione descritta. Nel primo caso (**Unione**) l'insieme **C** è costituito dagli elementi di **A** e dagli elementi di **B**. Nel secondo caso (**Intersezione**) l'insieme **C** è formato solo dagli elementi comuni ad **A** e **B**. Nel terzo, **C** è contenuto in **A** e, quindi, è costituito da alcuni elementi di **A**; **C** viene anche chiamato sottoinsieme di **A**. Nel quarto e quinto caso (**Complemento**) l'insieme **C** è costituito dagli elementi di **A** che non fanno parte di **B** (nell'es. 2, **A** viene chiamato **insieme universo**). Nel sesto caso (**Prodotto cartesiano**) l'insieme **C** è formato da coppie distinte di elementi di **A** e di **B**.

1.1.3 Alcune definizioni

Insieme vuoto Applicazione fra insiemi



Un insieme che non ha elementi viene definito **insieme vuoto**; ad esempio l'interserzione di due insiemi che non hanno elementi in comune è un insieme vuoto (v. figura). Si dice che esiste un'**applicazione** f fra gli insiemi **A** e **B** quando è definita una legge che associa un elemento $a \in \mathbf{A}$ ad un elemento $b \in \mathbf{B}$.

1.1.4 Quantificatori

Nella trattazione che seguirà si farà molto uso di simbolismi compatti per indicare concetti molto comuni nelle teorie matematiche. Il primo è quello di **esistenza**: ad es., di un numero, una proprietà, o, comunque, un oggetto matematico qualsiasi; il secondo è quello di **totalità**: molto spesso una proprietà di un'entità matematica è vera se è verificata per tutti gli oggetti che ad essa si riferiscono. Per indicare operativamente questi due concetti si usano i *quantificatori*. Il primo, il **quantificatore esistenziale**, definisce una proposizione in cui si afferma che esiste almeno un oggetto dotato di una certa proprietà; nell'esempio mostrato nella tabella sottostante si afferma che esiste almeno un x appartenente all'insieme **A**. Il secondo, il **quantificatore universale**, definisce una proposizione in cui si afferma che tutta una categoria di oggetti gode di una certa proprietà (ad es. tutti gli x che appartengono ad **A**).

Esistenziale	Universale
$\exists x \in \mathbf{A}$ Esiste un x appartenente all'insieme **A**	$\forall x \in \mathbf{A}$ Per ogni x appartenente all'insieme **A**

1.1.5 Insiemi finiti e infiniti

Molto spesso è utile conoscere quanti elementi possieda un insieme e se questa quantità sia finita o no. Si definisce **cardinalità** il numero di elementi di un insieme. Per determinare, in maniera ingenua, la cardinalità di un insieme basta contare i suoi elementi; se il conteggio ha un termine allora l'insieme è finito; se non è possibile enumerare manualmente gli elementi dell'insieme perché non si raggiunge mai un limite superiore allora l'insieme è infinito; ad esempio, per l'insieme dei **numeri naturali** dell'esperienza quotidiana, 1,2,3,... non può esistere un limite superiore: infatti se per assurdo esistesse un tale numero N, per definizione e costruzione stessa di numero naturale esisterebbe anche $N+1$, $N+2$, ... che contraddice l'ipotesi di partenza. In quest'ultimo caso è ancora possibile parlare di cardinalità dell'insieme anche se riferita a una quantità infinita: si definisce, a questo scopo, il concetto di **potenza**, ovvero l'entità dell'infinito che risulta dalla proprietà dell'insieme a cui si riferisce. Due insiemi si dicono **equipotenti** se hanno la stessa potenza. L'insieme dei numeri naturali ha la cosiddetta **potenza del numerabile**; l'insieme dei punti che formano una retta (o anche solo un segmento) ha la cosiddetta **potenza del continuo** che è maggiore della potenza del numerabile (da questo si intravede una gerarchia tra infiniti). Più rigorosamente, un insieme è infinito se esiste un suo sottoinsieme ad esso equipotente. Per definizione, un sottoinsieme **B** dell'insieme **A** è costituito da elementi di **A**: pertanto, se **A** è finito e con cardinalità **N**, il sottoinsieme **B** avrà una cardinalità minore di **N**. Se, invece, l'insieme è infinito, ad es. l'insieme dei numeri naturali (che si indica con il simbolo $\mathbb{N}$), possiamo costruire un suo sottoinsieme **B**, ad es. l'insieme dei numeri naturali pari, ad esso equipotente: infatti, **B** gode delle stesse proprietà di $\mathbb{N}$ poiché, se proviamo a fissare un limite superiore per **B**, ad es. K, vedremo subito che possiamo sempre avere $K+2$, $K+4$, $K+6$, etc.

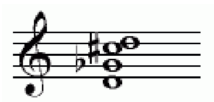
1.1.6 Definizione esplicita di insiemi

Un insieme è individuato dai suoi elementi e, quindi, è importante conoscere la loro natura. La maniera più semplice di definire un insieme è racchiudere in una coppia di parentesi graffe una lista di tutti gli elementi che lo compongono (v. tabella sottostante); questa metodologia è possibile solo se si tratta di un insieme finito. Se non è possibile o è scomodo eseguire tale elencazione, un insieme può essere definito evidenziando una sua proprietà. In questo contesto il simbolo $\equiv$ indica **è definito ...**, mentre il simbolo : significa **tale che ...**

Per elencazione	Per proprietà
A $\equiv$ {DO,RE,MI,FA,SOL,LA,SI}	**A** $\equiv \{x$: x è una nota della scala di DO maggiore}
B $\equiv \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	**B** $\equiv \{x\colon x \in \mathbb{N};\ x < 7\}$

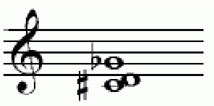
1.1.7 Un esempio: l'analisi musicale insiemistica

Date le sue caratteristiche, cui accenneremo tra poco, questo metodo analitico si applica a sistemi musicali dotati di un numero finito di elementi da combinare; in particolare l'ambito di indagine è limitato alle altezze in un contesto temperato e con intervalli minimi equalizzati. Il contesto a cui, ovviamente, Allen Forte pensava era quello della scala temperata occidentale che divide l'ottava in 12 intervalli uguali (i semitoni). Nulla vieta di estendere il metodo a sistemi basati su divisioni arbitrarie dell'ottava in n intervalli purché equalizzati.
Il metodo analitico consiste nel cercare le relazioni profonde che legano fra loro insiemi di **classi di altezze** (*pitch-class set*) diverse. Una classe di altezze è una nota della scala temperata definita indipendentemente dall'ottava di appartenenza; ad esempio, l'accordo



Es. 1a

eliminando note ripetute (anche su ottave diverse) e riportando il DO# nell'ottava che contiene le altre due note (in modo che tutte le note siano raggruppate in una unica ottava), viene ridotto a

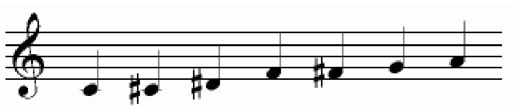


Es. 1b

prima di costruire il relativo insieme di classi di altezze.
Le note della scala vengono denotate con numeri naturali estesi, cioè appartenenti a $\mathbb{N}\cup\{0\}$ (v. prossimo paragrafo), in modo che il DO corrisponde a 0, DO# a 1, RE a 2 e così via fino a 11 che rappresenta il SI. Chiariamo subito questo punto con qualche esempio; l'accordo

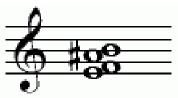
Es. 2

è rappresentato dall'insieme [0,1,6,7] (nella trattazione originaria di Forte vengono usate le parentesi quadre per indicare un insieme di classi di altezze; in tale contesto verrà mantenuta la stessa convenzione). Il frammento

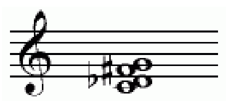


Es. 3

corrisponde all'insieme [0,1,3,5,6,7,9]. Naturalmente, la scala temperata consente di trattare l'enarmonia in maniera semplice: pertanto, DO# sarà identico a REb, etc. Ciò che conta è la distanza in semitoni dal primo elemento dell'insieme (0). La scala temperata permette anche di trattare in maniera equivalente insiemi uguali per trasposizione; in altre parole, un certo insieme di classi di altezze sarà invariante rispetto alla trasposizione; in questo caso, la prescrizione è che l'elemento più piccolo dell'insieme deve essere sempre 0; ciò significa che si dovranno trasporre le note dell'insieme di una quantità tale che la nota più bassa sia DO mantenendo inalterati i rapporti intervallari interni; ad esempio



sarà equivalente, per trasposizione, a



e l'insieme risultante sarà, nuovamente, [0,1,6,7] che viene, quindi, chiamato **forma primaria** (in realtà la costruzione della forma primaria è un po' più complicata ma i dettagli dell'operazione esulano dagli scopi di questo esempio).
Nel suo libro, Allen Forte cataloga tutti i possibili insiemi di classi di altezze raggruppandoli per cardinalità. Le cardinalità significative per l'analisi sono quelle che vanno da 3 fino a 9 (quando si tratterà la matematica combinatoria sarà più chiaro il motivo di questa scelta); ogni insieme è contraddistinto da una coppia di numeri separati da un trattino: il primo esprime la cardinalità dell'insieme, il secondo la posizione all'interno della lista di insiemi di uguale cardinalità. La tabella nella pagina successiva contiene i 208 insiemi catalogati da Forte, divisi in categorie relative alla cardinalità.
Così come sono definite le classi di altezze vengono introdotte le **classi di**

intervalli: anche in questo caso si opera una drastica riduzione tenendo anche conto del disordine con cui sono costruiti gli insiemi di classi di altezze; in questo caso, ad esempio, un intervallo di quinta (FA-DO = 7 semitoni) diventa indistinguibile dal suo rivolto (DO-FA = 5 semitoni) poiché formato con le stesse classi di altezze. Le classi di intervalli possibili sono dunque 6 se imponiamo la regola che tra i 2 rivolti si sceglie sempre l'intervallo formato dal numero minore di semitoni.
Ogni forma primaria di un insieme di classi di altezze ha un suo contenuto intervallare che viene esplicitato dal cosiddetto **vettore intervallare**: questo è formato da 6 cifre giustapposte ognuna delle quali, in una posizione determinata dall'ampiezza dell'intervallo (la prima posizione per i semitoni, la seconda per i toni interi, la terza per le terze minori, etc.), esprime il numero di occorrenze del relativo intervallo all'interno dell'insieme di classi di altezze considerato. Ad esempio, il solito [0,1,6,7] contiene i seguenti intervalli: 2 semitoni, una quarta, 2 tritoni, una quinta (che, per la regola esposta precedentemente, diventa una quarta): il suo vettore intervallare sarà, dunque, (200022).
Due distinti insiemi di classi di altezze si dicono **z-correlati** se condividono lo stesso vettore intervallare, cioè se, pur essendo diversi, hanno lo stesso contenuto intervallare. Per indicare che un insieme è z-correlato si pone una 'z' dopo il trattino che, nell'identificatore dell'insieme, separa la cardinalità dalla posizione nell'elenco. Ad esempio [0,1,3,7] è z-correlato con [0,1,4,6] (la dimostrazione di questo e altri esempi presenti nella tabella degli insiemi viene lasciata come esercizio).

Tabella degli insiemi di classi di altezze raggruppati per cardinalità

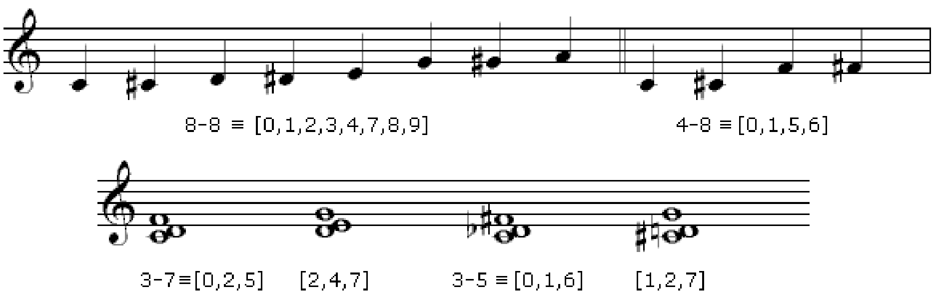
Tricordi (card. 3)	**Tetracordi** (card. 4)	**Pentacordi** (card. 5)	**Esacordi** (card. 6)	**Eptacordi** (cardinalità 7)	**Ottacordi** (cardinalità 8)	**Nonacordi** (cardinalità 9)
3-1 [0,1,2]	4-1 [0,1,2,3]	5-1 [0,1,2,3,4]	6-1 [0,1,2,3,4,5]	7-1 [0,1,2,3,4,5,6]	8-1 [0,1,2,3,4,5,6,7]	9-1 [0,1,2,3,4,5,6,7,8]
3-2 [0,1,3]	4-2 [0,1,2,4]	5-2 [0,1,2,3,5]	6-2 [0,1,2,3,4,6]	7-2 [0,1,2,3,4,5,7]	8-2 [0,1,2,3,4,5,6,8]	9-2 [0,1,2,3,4,5,6,7,9]
3-3 [0,1,4]	4-3 [0,1,3,4]	5-3 [0,1,2,4,5]	6-z3 [0,1,2,3,5,6]	7-3 [0,1,2,3,4,5,8]	8-3 [0,1,2,3,4,5,6,9]	9-3 [0,1,2,3,4,5,6,8,9]
3-4 [0,1,5]	4-4 [0,1,2,5]	5-4 [0,1,2,3,6]	6-z4 [0,1,2,4,5,6]	7-4 [0,1,2,3,4,6,7]	8-4 [0,1,2,3,4,5,7,8]	9-4 [0,1,2,3,4,5,7,8,9]
3-5 [0,1,6]	4-5 [0,1,2,6]	5-5 [0,1,2,3,7]	6-5 [0,1,2,3,6,7]	7-5 [0,1,2,3,5,6,7]	8-5 [0,1,2,3,4,6,7,8]	9-5 [0,1,2,3,4,6,7,8,9]
3-6 [0,2,4]	4-6 [0,1,2,7]	5-6 [0,1,2,5,6]	6-z6 [0,1,2,5,6,7]	7-6 [0,1,2,3,4,7,8]	8-6 [0,1,2,3,5,6,7,8]	9-6 [0,1,2,3,4,5,6,8,10]
3-7 [0,2,5]	4-7 [0,1,4,5]	5-7 [0,1,2,6,7]	6-7 [0,1,2,6,7,8]	7-7 [0,1,2,3,6,7,8]	8-7 [0,1,2,3,4,5,8,9]	9-7 [0,1,2,3,4,5,7,8,10]
3-8 [0,2,6]	4-8 [0,1,5,6]	5-8 [0,2,3,4,6]	6-8 [0,2,3,4,5,7]	7-8 [0,2,3,4,5,6,8]	8-8 [0,1,2,3,4,7,8,9]	9-8 [0,1,2,3,4,6,7,8,10]
3-9 [0,2,7]	4-9 [0,1,6,7]	5-9 [0,1,2,4,6]	6-9 [0,1,2,3,5,7]	7-9 [0,1,2,3,4,6,8]	8-9 [0,1,2,3,6,7,8,9]	9-9 [0,1,2,3,5,6,7,8,10]
3-10 [0,3,6]	4-10 [0,2,3,5]	5-10 [0,1,3,4,6]	6-z10 [0,1,3,4,5,7]	7-10 [0,1,2,3,4,6,9]	8-10 [0,2,3,4,5,6,7,9]	9-10 [0,1,2,3,4,6,7,9,10]
3-11 [0,3,7]	4-11 [0,1,3,5]	5-11 [0,2,3,4,7]	6-z11 [0,1,2,4,5,7]	7-11 [0,1,3,4,5,6,8]	8-11 [0,1,2,3,4,5,7,9]	9-11 [0,1,2,3,5,6,7,9,10]
3-12 [0,4,8]	4-12 [0,2,3,6]	5-z12 [0,1,3,5,6]	6-z12 [0,1,2,4,6,7]	7-z12 [0,1,2,3,4,7,9]	8-12 [0,1,3,4,5,6,7,9]	9-12 [0,1,2,4,5,6,8,9,10]
	4-13 [0,1,3,6]	5-13 [0,1,2,4,8]	6-z13 [0,1,3,4,6,7]	7-13 [0,1,2,4,5,6,8]	8-13 [0,1,2,3,4,6,7,9]	
	4-14 [0,2,3,7]	5-14 [0,1,2,5,7]	6-14 [0,1,3,4,5,8]	7-14 [0,1,2,3,5,7,8]	8-14 [0,1,2,4,5,6,7,9]	
	4-z15 [0,1,4,6]	5-15 [0,1,2,6,8]	6-15 [0,1,2,4,5,8]	7-15 [0,1,2,4,6,7,8]	8-z15 [0,1,2,3,4,6,8,9]	
	4-16 [0,1,5,7]	5-16 [0,1,3,4,7]	6-16 [0,1,4,5,6,8]	7-16 [0,1,2,3,5,6,9]	8-16 [0,1,2,3,5,7,8,9]	
	4-17 [0,3,4,7]	5-z17 [0,1,3,4,8]	6-z17 [0,1,2,4,7,8]	7-z17 [0,1,2,4,5,6,9]	8-17 [0,1,3,4,5,6,8,9]	
	4-18 [0,1,4,7]	5-z18 [0,1,4,5,7]	6-18 [0,1,2,5,7,8]	7-z18 [0,1,2,3,5,8,9]	8-18 [0,1,2,3,5,6,8,9]	
	4-19 [0,1,4,8]	5-19 [0,1,3,6,7]	6-z19 [0,1,3,4,7,8]	7-19 [0,1,2,3,6,7,9]	8-19 [0,1,2,4,5,6,8,9]	
	4-20 [0,1,5,8]	5-20 [0,1,5,6,8]	6-20 [0,1,4,5,8,9]	7-20 [0,1,2,4,7,8,9]	8-20 [0,1,2,4,5,7,8,9]	
	4-21 [0,2,4,6]	5-21 [0,1,4,5,8]	6-21 [0,2,3,4,6,8]	7-21 [0,1,2,4,5,8,9]	8-21 [0,1,2,3,4,6,8,10]	
	4-22 [0,2,4,7]	5-22 [0,1,4,7,8]	6-22 [0,1,2,4,6,8]	7-22 [0,1,2,5,6,8,9]	8-22 [0,1,2,3,5,6,8,10]	
	4-23 [0,2,5,7]	5-23 [0,2,3,5,7]	6-z23 [0,2,3,5,6,8]	7-23 [0,2,3,4,5,7,9]	8-23 [0,1,2,3,5,7,8,10]	
	4-24 [0,2,4,8]	5-24 [0,1,3,5,7]	6-z24 [0,1,3,4,6,8]	7-24 [0,1,2,3,5,7,9]	8-24 [0,1,2,4,5,6,8,10]	
	4-25 [0,2,6,8]	5-25 [0,2,3,5,8]	6-z25 [0,1,3,5,6,8]	7-25 [0,2,3,4,6,7,9]	8-25 [0,1,2,4,6,7,8,10]	
	4-26 [0,3,5,8]	5-26 [0,2,4,5,8]	6-z26 [0,1,3,5,7,8]	7-26 [0,1,3,4,5,7,9]	8-26 [0,1,2,4,5,7,9,10]	
	4-27 [0,2,5,8]	5-27 [0,1,3,5,8]	6-27 [0,1,3,4,6,9]	7-27 [0,1,2,4,5,7,9]	8-27 [0,1,2,4,5,7,8,10]	
	4-28 [0,3,6,9]	5-28 [0,2,3,6,8]	6-z28 [0,1,3,5,6,9]	7-28 [0,1,3,5,6,7,9]	8-28 [0,1,3,4,6,7,9,10]	
	4-z29 [0,1,3,7]	5-29 [0,1,3,6,8]	6-z29 [0,2,3,6,7,9]	7-29 [0,1,2,4,6,7,9]	8-z29 [0,1,2,3,5,6,7,9]	
		5-30 [0,1,4,6,8]	6-30 [0,1,3,6,7,9]	7-30 [0,1,2,4,6,8,9]		
		5-31 [0,1,3,6,9]	6-31 [0,1,4,5,7,9]	7-31 [0,1,3,4,6,7,9]		
		5-32 [0,1,4,6,9]	6-32 [0,2,4,5,7,9]	7-32 [0,1,3,4,6,8,9]		
		5-33 [0,2,4,6,8]	6-33 [0,2,3,5,7,9]	7-33 [0,1,2,4,6,8,10]		
		5-34 [0,2,4,6,9]	6-34 [0,1,3,5,7,9]	7-34 [0,1,3,4,6,8,10]		
		5-35 [0,2,4,7,9]	6-35 [0,2,4,6,8,10]	7-35 [0,1,3,5,6,8,10]		
		5-z36 [0,1,2,4,7]	6-z36 [0,1,2,3,4,7]	7-z36 [0,1,2,3,5,6,8]		
		5-z37 [0,3,4,5,8]	6-z37 [0,1,2,3,4,8]	7-z37 [0,1,3,4,5,7,8]		
		5-z38 [0,1,2,5,8]	6-z38 [0,1,2,3,7,8]	7-z38 [0,1,2,4,5,7,8]		
			6-z39 [0,2,3,4,5,8]			
			6-z40 [0,1,2,3,5,8]			
			6-z41 [0,1,2,3,6,8]			
			6-z42 [0,1,2,3,6,9]			
			6-z43 [0,1,2,5,6,8]			
			6-z44 [0,1,2,5,6,9]			
			6-z45 [0,2,3,4,6,9]			
			6-z46 [0,1,2,4,6,9]			
			6-z47 [0,1,2,4,7,9]			
			6-z48 [0,1,2,5,7,9]			
			6-z49 [0,1,3,4,7,9]			
			6-z50 [0,1,4,6,7,9]			

Agli insiemi di classi di altezze è possibile applicare le operazioni fra insiemi generici che abbiamo già visto precedentemente (unione, intersezione, complemento, inclusione, etc.) per ottenere nuovi insiemi correlati. Vediamo qualche esempio:

- l'insieme dell'esempio 1b (3-5 $\equiv$ [0,1,6]) è in relazione di **inclusione** con quello dell'es. 2 (4-9 $\equiv$ [0,1,6,7]); cioè, 3-5 $\subset$ 4-9, il che stabilisce una correlazione molto forte tra i due insiemi;

- l'**intersezione** tra l'insieme 7-28 ≡ [0,1,3,5,6,7,9] dell'es. 3 e quello dell'es. 2 (4-9) è di nuovo l'insieme 4-9 ≡ [0,1,6,7] = 7-28 ∩ 4-9;
- l'**unione** fra gli insiemi 3-11 ≡ [0,3,7] (la triade minore) e 3-5 ≡ [0,1,6] è l'insieme 5-19 ≡ [0,1,3,6,7] = 3-11 ∪ 3-5;
- il **complemento** dell'insieme 5-1 ≡ [0,1,2,3,4] rispetto l'insieme universo **U** ≡ [0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11] è [5,6,7,8,9,10,11] che, opportunamente trasposto, diventa 7-1 ≡ [0,1,2,3,4,5,6] = **U** \ 5-1.

Per terminare questa breve trattazione dei fondamenti della *pitch-class set theory* accenniamo al concetto di **complesso** (*set-complex* K) e **sottocomplesso di insiemi** (*set-complex* Kh) e di **insieme cardine** (*nexus set*); l'insieme cardine è forse l'oggetto più importante che si cerca nell'analisi di un brano poiché permette di trovare le relazioni strutturali profonde che legano parti anche lontane di un'opera; il complesso K è un raggruppamento formato da tutti gli insiemi che sono contenuti nell'insieme cardine o nel suo complemento mentre il complesso Kh è formato da tutti gli insiemi contenuti sia nell'insieme cardine che nel suo complemento. Vediamo un esempio: l'insieme 3-7 ([0,2,5]) fa parte del complesso K imperniato su 8-8 ([0,1,2,3,4,7,8,9]) o su 4-8 (= **U** \ 8-8 ≡ [0,1,5,6]); per rendere evidente tale affermazione si esegue il *mapping*, ovvero si traspone e/o si inverte l'insieme fino a trovarlo nell'insieme cardine o nel suo complemento; infatti, se, ad esempio, trasponiamo 3-7 di un tono otteniamo [2,4,7] ⊂ 8-8, ma altresì [2,4,7] ⊄ 4-8. Se invece consideriamo l'insieme 3-5 ([0,1,6]) vediamo subito che 3-5 ⊂ 4-8 ([0,1,5,6]) e 3-5 ⊂ 8-8 se effettuiamo il *mapping* trasponendo 3-5 di un semitono (ottenendo [1,2,7]): in questo caso 3-5 fa parte del complesso Kh imperniato su 8-8. Possiamo vedere queste correlazioni in notazione:



Nei prossimi capitoli si tornerà sulla teoria di Forte per esemplificare concetti matematici correlati. In ogni caso si rimanda alla bibliografia per una trattazione approfondita dell'argomento. Per concludere, possiamo dire che la *pitch-class set theory* non è un tentativo di matematizzare la musica dato che, come si è potuto vedere da questi brevi cenni, tocca solo la superficie dei concetti matematici che impiega; inoltre, per poter condurre un'analisi musicalmente significativa è necessario operare una segmentazione del brano da studiare che permetta di individuare gli insiemi dalle cui mutue relazioni sia possibile estrarre la sua struttura profonda: e questo è un compito squisitamente musicale.

1.1.8 Insiemi numerici

Le entità trattate dalle teorie matematiche sono, nella maggioranza dei casi, numeri o oggetti a cui si possono far corrispondere entità numeriche. Pertanto risulta indispensabile definire tutti i possibili insiemi composti da numeri dandone una caratterizzazione chiara e un ambito definito. Il primo e più semplice insieme numerico è quello dei **numeri naturali** (v. tabella sotto); questo può essere caratterizzato molto semplicemente definendo un solo elemento e una regola di costruzione: l'unico elemento è il numero **1** e la regola stabilisce che un generico elemento è ottenuto sommando al predecessore l'elemento di partenza (cioè 1). Molto spesso si usa una versione allargata di $\mathbb{N}$ comprendente anche l'elemento 0 (introdotto nella Matematica occidentale durante il Medioevo dagli Arabi che, a loro volta, lo presero in prestito dalla Matematica indiana) e si indica, con ovvio simbolismo, $\mathbb{N} \cup 0$.
L'insieme dei numeri **interi relativi** (detti anche semplicemente interi) è composto dai numeri naturali, lo 0 e i simboli + e - che, posti davanti al numero, indicano la sua posizione relativa allo 0; l'insieme degli interi si indica con $\mathbb{Z}$ ed è, ovviamente, equipotente a $\mathbb{N}$.

L'insieme dei **numeri razionali** (indicato con il simbolo $\mathbb{Q}$) è formato da tutti i quozienti di divisioni tra coppie di numeri interi; si può dimostrare che $\mathbb{Q}$ è equipotente a $\mathbb{N}$ e, quindi, ha la potenza del numerabile.
L'insieme dei **numeri irrazionali** è formato da tutti i numeri con virgola (non interi) che non possono essere espressi come rapporto tra interi. Il più noto numero irrazionale è, forse, π; ma anche tutti i risultati non interi dell'operazione di radice $n - ma$ $(n \neq 1)$ sono numeri irrazionali (ad es. $\sqrt{2}$); possiamo, sulla base di questi due esempi, dividere i numeri irrazionali in **algebrici** quando provengono dall'applicazione di un'operazione algebrica

(come la radice) e **trascendenti** quando non esiste nessuna operazione algebrica in grado di generarli (come π). Vedremo più avanti che i numeri trascendenti si ottengono, molto spesso, con un'operazione di passaggio al limite. La cardinalità dell'insieme degli irrazionali è la potenza del continuo.

L'insieme dei numeri reali (indicato con $\mathbb{R}$) è quello che contiene tutti i numeri immaginabili, ovvero è definito come l'unione dell'insieme dei numeri razionali con quello degli irrazionali (v. tabella sottostante). La sua potenza è, ovviamente, quella del continuo.
Infine, esiste l'insieme dei **numeri complessi** formato da coppie di numeri reali: il primo della coppia viene chiamato **parte reale**, il secondo **parte immaginaria** e si suppone moltiplicato, per definizione, alla cosiddetta unità immaginaria $\jmath$ ($\jmath = \sqrt{-1}$).

Naturali	**Interi**
$x \in \mathbb{N}$ $\mathbb{N} \equiv \{x : x = 1, 2, 3, ...\}$	$x \in \mathbb{Z}$ $\mathbb{Z} \equiv \{x : x = ..., -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$
Razionali	**Irrazionali**
$x \in \mathbb{Q}$ $\mathbb{Q} \equiv \{x : x = p/q; q \neq 0; p, q \in \mathbb{Z}\}$	$x \in \mathbf{I}$ $\mathbf{I} \equiv \{x : x \neq p/q; x \notin \mathbb{Z}\}$
Reali	**Complessi**
$x \in \mathbb{R}$ $\mathbb{R} \equiv \mathbb{Q} \cup \mathbf{I}$	$x \in \mathbb{C}$ $\mathbb{C} \equiv \{x : x = a + \jmath b; a, b \in \mathbb{R}; \jmath^2 = -1\}$

E' ovvio che $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

1.1.9 Intervalli

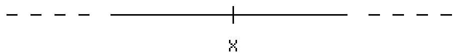
Un qualsiasi sottoinsieme di un insieme numerico viene chiamato **intervallo**; nella maggior parte dei casi si usa questo termine per indicare un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. L'importanza del concetto di intervallo sarà più chiara quando parleremo di funzioni reali di variabile reale. Un intervallo è caratterizzato da un limite inferiore e da uno superiore; tutti gli elementi dell'intervallo sono compresi tra questi due limiti. Un intervallo si dice **aperto** quando non contiene i suoi due limiti (inferiore e superiore); è **chiuso** quando, invece, contiene anche i due limiti; è **aperto-chiuso** quando contiene il limite superiore ma non quello inferiore e **chiuso-aperto** quando contiene l'inferiore e non il superiore. La tabella sottostante mostra anche i simbolismi adottati per rappresentare tali caratterizzazioni.

Aperto	**Chiuso**
$A \equiv (a,b)$	$A \equiv [a,b]$
$A \equiv x : x \in \mathbb{R}; a < x < b$	$A \equiv x : x \in \mathbb{R}; a \leqslant x \leqslant b$
Aperto-chiuso	**Chiuso-aperto**
$A \equiv (a,b]$	$A \equiv [a,b)$
$A \equiv x : x \in \mathbb{R}; a < x \leqslant b$	$A \equiv x : x \in \mathbb{R}; a \leqslant x < b$

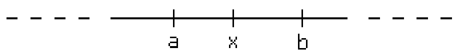
$a, b \in \mathbb{R}$; ad esempio $3 \in (2,4]$; $2 \notin (2,4]$.

1.1.10 Intervalli e geometria

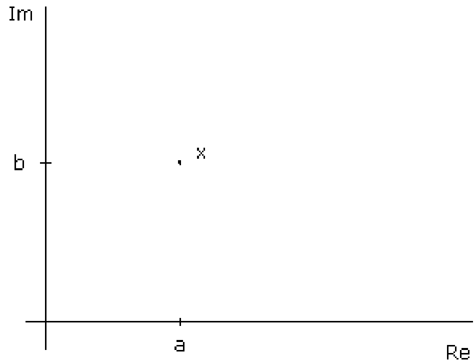
L'insieme dei numeri reali ($\mathbb{R}$) può essere messo in relazione con una retta; un certo numero reale $x \in \mathbb{R}$ è rappresentato da un ben determinato punto sulla retta



e viceversa, cioè un punto sulla retta è associato ad un singolo e preciso numero reale; si dice, in questo caso, che esiste una **corrispondenza biunivoca** fra gli elementi di $\mathbb{R}$ e i punti sulla retta. Un intervallo è analogo a un segmento; un punto $x \in [a,b]$ è associato a un ben preciso punto interno al segmento e, come sempre, viceversa cioè un punto del segmento corrisponde a uno e un solo numero reale



L'insieme dei numeri complessi ($\mathbf{a} + \jmath\mathbf{b} \in \mathbb{C}$) è rappresentabile con un piano in cui sia definito un sistema di assi cartesiani (2 rette di riferimento perpendicolari fra loro che si incontrano in un punto che convenzionalmente si indica con 0): sulle ascisse (l'asse orizzontale) troviamo la **parte reale** (**a**, cioè la parte non moltiplicata per l'unità immaginaria $\jmath$) mentre sulle ordinate (l'asse verticale) troviamo la **parte immaginaria** (**b**, ovvero il fattore che moltiplica l'unità immaginaria $\jmath$); un numero complesso $x \in \mathbb{C}$, dunque, è rappresentato con un punto sul piano (all'incrocio dei segmenti, perpendicolari fra loro e paralleli agli assi cartesiani, che partono dai punti **a** e **b**).

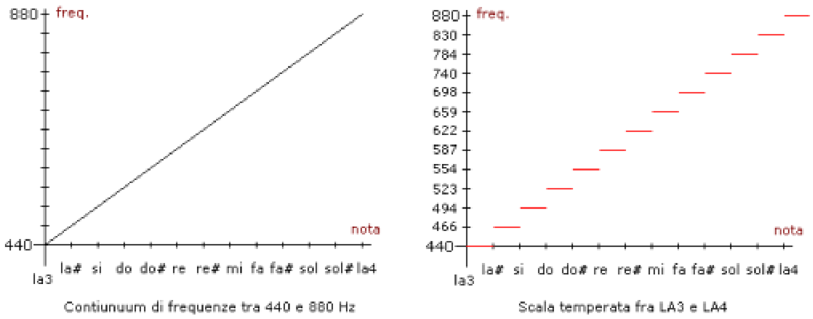


1.1.11 Esempio: continuum di frequenze e scale musicali

La frequenza è una grandezza associata al fenomeno fisico dell'oscillazione; questa è legata al concetto di ciclicità e di ripetizione: l'esempio che meglio chiarisce questo concetto è un punto che si muove su una circonferenza; dopo aver percorso l'intera circonferenza il punto si ritrova alla posizione di partenza per compiere un nuovo giro e così via. Ogni giro che effettua il punto è un'oscillazione: il numero di volte che il punto percorre un giro intero, quindi un'oscillazione, nell'unità di tempo è la frequenza. Sappiamo che i fenomeni acustici (ad es., il suono degli strumenti musicali) sono rappresentabili in termini di oscillazioni più o meno complesse; un'importante caratteristica di queste oscillazioni è proprio la frequenza: ad es., pestando il DO centrale di un pianoforte otteniamo un'oscillazione, dovuta alla percussione della relativa corda, la cui frequenza è circa 261.6 Hz (lo Hertz è l'unità di misura della frequenza e si esprime in cicli/secondo). L'altezza di un suono è legata direttamente alla frequenza della relativa oscillazione e, pertanto, ogni nota è caratterizzata da una certa frequenza; inoltre una nota più alta di un'ottava di un'altra ha una frequenza esattamente doppia rispetto a quest'ultima. Una scala musicale si costruisce proprio suddividendo l'ottava in un certo numero di parti: ad es., la scala temperata occidentale si ottiene dividendo l'ottava in 12 parti ognuna di grandezza perfettamente identica alle altre; questo fatto è il risultato di un'astrazione matematica dato che la costruzione delle scale naturali, che non presentano la regolarità della nostra scala temperata, dipende, invece, anche da considerazioni acustiche e psicoacustiche. Ogni parte in cui è suddivisa l'ottava è, come si sa, il semitono che è relativo a 2 note contigue della scala; il rapporto tra due note adiacenti della scala è $\sqrt[12]{2} = 1{,}0594630943592952645618252949463$ (la ragione di ciò sarà più chiara dopo la lettura dei prossimi capitoli e di alcuni testi della bibliografia) e il punto di riferimento è il LA3 del diapason che ha frequenza 440 Hz: tutte le note possibili sono generate da questi soli 2 numeri. La tabella sottostante mostra le frequenze (arrotondate) di una scala completa dell'estensione di un'ottava a partire dal LA3

LA3	LA#3	SI3	DO4	DO#4	RE4	RE#4	MI4	FA4	FA#4	SOL4	SOL#4	LA4
440	466	494	523	554	587	622	659	698	740	784	830	880

Forse può essere più semplice capire la differenza fra un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ e uno di $\mathbb{N}$ (che sono intervalli *numerici* da non confondere con gli intervalli *musicali*) confrontando scale musicali e ambiti di frequenza: l'intervallo $[440{,}880] \subset \mathbb{N}$ contiene un numero finito (12) di frequenze diverse mentre l'intervallo $[440{,}880] \subset \mathbb{R}$ contiene *infinite* frequenze diverse, cioè quelle della scala più tutte quelle che sono comprese tra queste ultime. La figura qui sotto esemplifica questa situazione



(il fatto che il grafico della scala assomigli proprio a una scaletta è solo una coincidenza?). Comunque, si può interpretare la coppia di grafici affermando che la scala è una discretizzazione di un ambito frequenziale continuo; oppure si può vedere da questo la differenza che esiste fra un glissato (come si può eseguire su un trombone) e una scala (come si può eseguire su un pianoforte).

1.2 Cenni di Logica

Il campo di indagine della Logica, in particolare della **Logica matematica**, è costituito da tutte le proposizioni di cui si può dire se sono vere o false o, in termini più precisi, di quelle che sono contraddistinte dal fatto di assumere un determinato **valore di verità** scelto da un insieme di almeno 2 simboli come $\{V, F\}$ in cui, convenzionalmente, V sta per Vero e F per Falso. In

questo paragrafo verranno trattate le nozioni più elementari della disciplina rimandando alla bibliografia per eventuali approfondimenti.
Una **proposizione logica**, intuitivamente, è un'affermazione, effettuata in un determinato contesto, che può essere vera o falsa; ad esempio, in un ambito quotidiano, la proposizione il caffè è amaro senza zucchero è vera; in ambito musicale il violino è uno strumento a corde è vera mentre il trombone è uno strumento a corde è falsa; in ambito matematico l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti è vera. Molto spesso non è così semplice determinare la verità o falsità di un'affermazione (come l'ultima proposizione data) e, pertanto, occorre costruire delle **catene deduttive** basate sul concetto di **implicazione**; data una proposizione logica **A** possiamo assegnare ad essa un valore di verità dall'insieme $\{V, F\}$: si dice che **A** implica la proposizione **B** (e si scrive $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$, o, anche, in ambito non strettamente logico-matematico, $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$) se il valore di verità di **B** dipende da quello di **A** (cioè, **B** è vera se anche **A** lo è, ma non, necessariamente, viceversa). Ad esempio, le proposizioni $\mathbf{A} \equiv$ sarà bel tempo e $\mathbf{B} \equiv$ andrò in campeggio possono essere collegate tramite l'implicazione ottenendo $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ (in Italiano diventerebbe: se sarà bel tempo allora andrò in campeggio).
Gli enunciati e i teoremi che vedremo fanno parte della cosiddetta **Algebra di Boole** che è la prima sistematizzazione in senso matematico della Logica. I risultati più clamorosi della Logica matematica si sono avuti nella **teoria della dimostrazione** che ha raggiunto il suo apice con l'ormai famosissimo **teorema di Gödel** che stabilisce che nessuna teoria matematica è autosufficiente, ovvero che in qualsiasi teoria matematica esistono delle proposizioni che non si possono dimostrare in maniera univoca usando solo assiomi e teoremi di quella specifica teoria. Un altro importante risultato della Logica matematica relativo allo studio dei fondamenti della Matematica è la teoria delle **macchine di Turing** che ha avuto il suo sviluppo più sorprendente nella fondazione dell'Informatica teorica.

1.2.1 Connettivi logici

Data una o più proposizioni logiche se ne possono costruire di nuove combinando in vario modo quelle di partenza; per far ciò occorre usare i **connettivi logici** tra cui quelli fondamentali sono:

- l'operatore **non** o negazione (l'inglese NOT) è un operatore unario, cioè si applica a una singola proposizione; anteponendo a questa il simbolo $\neg$, che indica, appunto, la negazione, si otterrà una proposizione con valore di verità opposto. Ad esempio, data la proposizione

A $\equiv$ il violino è uno strumento a corde con valore di verità V, applicando la negazione otterremo una proposizione $\mathbf{B} = \neg\mathbf{A}$ (che in italiano corrente si può tradurre con il violino **non** è uno strumento a corde) con valore di verità F;

- l'operatore **e** (AND) che si indica con il simbolo $\wedge$; date 2 proposizioni **A** e **B**, applicando tale operatore otterremo una nuova proposizione **C** = $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ che ha un valore di verità V solo se entrambe le proposizioni hanno valore V. Ad esempio, date **A** $\equiv$ le corde del violino sono 4 e **B** $\equiv$ le corde si suonano con l'archetto entrambe con valore di verità V, allora la proposizione C = A $\wedge$ B (che in un italiano approssimativo si potrebbe tradurre le corde del violino sono 4 **e** si suonano con l'archetto) ha valore di verità V; se fosse invece **B** $\equiv$ le corde si suonano con la *coulisse*, chiaramente falsa, la proposizione $\mathbf{C} = \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ avrebbe valore di verità F nonostante **A** sia vera;

- l'operatore **o** (OR) che si indica con il simbolo $\vee$; date 2 proposizioni **A** e **B**, applicando tale operatore si otterrà una nuova proposizione $\mathbf{C} = \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ che ha un valore di verità V se almeno una delle 2 proposizioni ha valore V. Ad es., **A** $\equiv$ le corde si suonano con la coulisse con valore di verità F e **B** $\equiv$ le corde si suonano con l'archetto con valore di verità V, $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ avrà valore di verità V perché, nonostante **B** sia falsa, **A** è comunque vera (in italiano avremmo le corde si suonano con la coulisse **o** con l'archetto che, anche se suona un po' insensata, è perfettamente valida da un punto di vista logico);

- l'operatore **aut** (Exclusive-OR) che si indica con il simbolo $\oplus$; se connettiamo 2 proposizioni **A** e **B** per mezzo di tale operatore avremo un risultato con valore di verità V se **A** e **B** sono **mutuamente esclusive**, cioè se hanno valori di verità opposti (ovvero, se una è vera l'altra deve essere falsa e viceversa); è il significato della congiunzione latina *autaut* (che si usa idiomaticamente anche in italiano per esprimere i termini di una difficile scelta). Un esempio è l'espressione gergale **o** mangi questa minestra **o** ti butti dalla finestra.

Si possono applicare a piacere e ripetutamente i connettivi per costruire proposizioni di qualsiasi grado di complessità. Ad es., date **A** $\equiv$ le corde del violino sono 4, **B** $\equiv$ le corde si suonano con l'archetto e **C** $\equiv$ le corde si suonano pizzicandole, possiamo costruire la proposizione $\mathbf{D} = \mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \vee \mathbf{C})$ che ha valore di verità V (e in italiano sarebbe le corde del violino sono 4 e si suonano con l'archetto o pizzicandole).

1.2.2 Tabelle di verità

A ogni operatore logico si associa una tabella che riassume completamente il suo comportamento in funzione dei valori di verità che possono assumere le proposizioni connesse; ad esempio, l'operatore unario *negazione* avrà la seguente **tabella di verità**:

$\mathbf{A}$	$\neg\mathbf{A}$
V	F
F	V

in cui l'ultima colonna contiene i possibili risultati conseguenti all'applicazione dell'operatore e le altre contengono una lista dei possibili valori di verità delle proposizioni da connettere; in questo esempio, nella prima colonna sono presenti i 2 valori che può assumere la proposizione **A**, nella seconda i corrispondenti valori dopo l'applicazione del connettivo. In altre parole, se **A** è vera $\neg$**A** è falsa, se **A** è falsa $\neg$**A** è vera.
Vediamo le altre tabelle di verità:
Operatore <u>**AND**</u>

$\mathbf{A}$	$\mathbf{B}$	$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Operatore <u>**OR**</u>

$\mathbf{A}$	$\mathbf{B}$	$\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Operatore <u>**XOR**</u>

$\mathbf{A}$	$\mathbf{B}$	$\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

1.2.3 Alcuni teoremi

Vediamo, prima di tutto, alcuni semplici e intuitivi teoremi:

a) $\neg\neg\mathbf{A} = \mathbf{A}$

b) $\neg\ \mathbf{A} \wedge \mathbf{A} = F$

c) $\neg\mathbf{A} \vee \mathbf{A} = V$

d) $\mathbf{A} \wedge \mathbf{A} = \mathbf{A}$

e) $\mathbf{A} \vee \mathrm{A} = \mathbf{A}$

Esistono poi alcuni teoremi che legano fra loro i principali operatori logici e che, quindi, permettono di ridurre il numero di operatori necessari; ne vedremo solo alcuni.

1. $\neg\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B} = \neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$ (Leggi di De Morgan)
2. $\neg\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{B} = \neg(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})$

(l'uso delle parentesi ha lo stesso senso di quello che ha in Algebra). Dal teorema 1 vediamo che l'operatore OR non è strettamente indispensabile: infatti, negando ambo i membri, otterremo $\mathbf{A} \vee \mathbf{B} = \neg(\neg\ \mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B})$ il che significa che l'operatore OR può essere espresso in termini di AND e di NOT. Generalizzando, possiamo affermare:

qualsiasi operatore logico può essere rappresentato da un'opportuna combinazione dei soli connettivi AND e NOT.

Come esempio verrà mostrato come esprimere l'OR esclusivo usando solo AND e NOT. A questo scopo costruiamo la tabella di verità della proposizione $\mathbf{C} = \neg(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})$

A	**B**	**C**
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

e quella della proposizione $\mathbf{D} = \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$

A	**B**	$\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Se connettiamo **C** e **D** tramite un AND avremo

A	**B**	$\mathbf{C} \wedge \mathbf{D}$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

che è effettivamente la tabella della XOR; essa è rappresentata, dunque, dalla seguente proposizione:

$$\mathbf{A} \oplus \mathbf{B} = \neg(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$$

Ma, per il teorema 1, sappiamo che $\mathbf{A} \vee \mathbf{B} = \neg(\neg\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B})$; pertanto

$$\mathbf{A} \oplus \mathbf{B} = \neg(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \wedge \neg(\neg\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B})$$

che, appunto, esprime l'operatore XOR in termini di soli AND e NOT.